Le nombre d'Or, pour quoi faire ?

Xavier Saint-Martin[1], 17 août 2010

1. Un peu d'histoire de la numération

De nos jours, l'immense majorité des calculs dimensionnels est basée sur le système décimal, en notation arabe :

- chiffres de 0 à 9, en notation positionnelle (ce qui veut dire que dans le nombre 22, il y a un « 2 » qui vaut dix fois plus que l'autre) ;
- unités de mesure telles que centimètre, décimètre, mètre, décamètre ;
- on passe de l'une à la suivante en multipliant par 10. Par exemple, 10 centimètres = 1 décimètre. Les mathématiciens disent qu'il s'agit d'une « suite géométrique de raison 10 ».

Ce système permet de convertir facilement des surfaces :

- soit par le calcul (combien y a-t-il de dm^2 dans 1,5 m^2 ?) ;
- soit en exploitant le fait que dans une suite géométrique, le carré d'un terme est égal au produit des deux termes qui l'entourent. Ainsi, par exemple : 1 décimètre ^{2} = 1 mètre x 1 centimètre.

A noter que ce système peut être géométriquement construit avec facilité : si on a un étalon d'un décimètre, il suffit de le reporter 10 fois pour avoir une longueur d'un mètre, et ainsi de suite pour les unités suivantes.

2. Le problème

Ce système de mesure décimal arabe n'a été introduit que vers l'an mille en Europe. Avant, il y avait les chiffres romains, quasi-impossibles à multiplier ou à diviser. A quoi s'ajoute le fait que, dans la population laborieuse, rares étaient ceux qui savaient lire, écrire ou compter.

Imaginons donc le bâtisseur d'un édifice préroman (typiquement vers l'an 900), qui doit faire venir des pierres d'une carrière, parfois très lointaine, pour ériger un mur dont il connaît les dimensions :

- Les unités de longueur varient d'une région à l'autre
- En supposant que le bâtisseur envoie un étalon de longueur, le responsable de la carrière ne sait pas calculer le nombre total de pierres à envoyer. il aurait donc à étaler les pierres dont il dispose jusqu'à atteindre la surface demandée. C'est encore plus vrai s'il a des pierres de dimensions variées : il ne sait pas calculer des sommes de surfaces.

On imagine, dans un tel contexte, les multiples difficultés de coopération entre les responsables des carrières et ceux des chantiers de construction.

3. La solution

Le système de mesure choisi par les bâtisseurs du moyen-âge

Les bâtisseurs du moyen-âge se sont dotés d'un système de mesures dimensionnelles qui s'appelait la quine, et dont les unités successives s'inspiraient de la morphologie humaine :

- Paume (largeur de la paume de la main) ;

[1] Je remercie Martine Dagosneau, dont la relecture attentive a permis corrections et clarifications.

- Palme (doigts écartés, distance de l'extrémité de l'index à l'extrémité de l'annulaire) ;
- Empan (doigts écartés, distance de l'extrémité du pouce à l'extrémité de l'annulaire) ;
- Pied (longueur du pied, du talon à l'extrémité du gros orteil) ;
- Coudée (du coude à l'extrémité du majeur).

Ces unités dimensionnelles, de plus en plus grandes, ont été normalisées : les bâtisseurs avaient un bâton, appelé la « canne royale », qui portait des repères pour chacune de ces longueurs.
Il se trouve qu'ils ont choisi, pour ces unités successives, deux propriétés remarquablement utiles :

- Chaque unité de la quine, multipliée par elle-même, est égale au produit de l'unité inférieure avec l'unité supérieure. Par exemple : empan x empan = palme x pied. Comme déjà indiqué, notre système décimal moderne dispose également de cette propriété : décimètre x décimètre = centimètre x mètre. La quine est donc une suite géométrique.
- Chaque unité de la quine est égale à la somme des deux unités précédentes. Par exemple : pied = empan + palme.
  Notre système décimal moderne ne possède pas cette propriété : 1 décimètre n'est pas égal à 1 centimètre + 1 millimètre.
  Cette deuxième propriété permettait facilement aux bâtisseurs d'ajouter à la quine des unités de mesure plus grandes que la coudée, unités qui respecteraient toujours les deux propriétés de la quine : il leur suffisait de mettre bout à bout les deux unités les plus grandes pour obtenir la suivante.

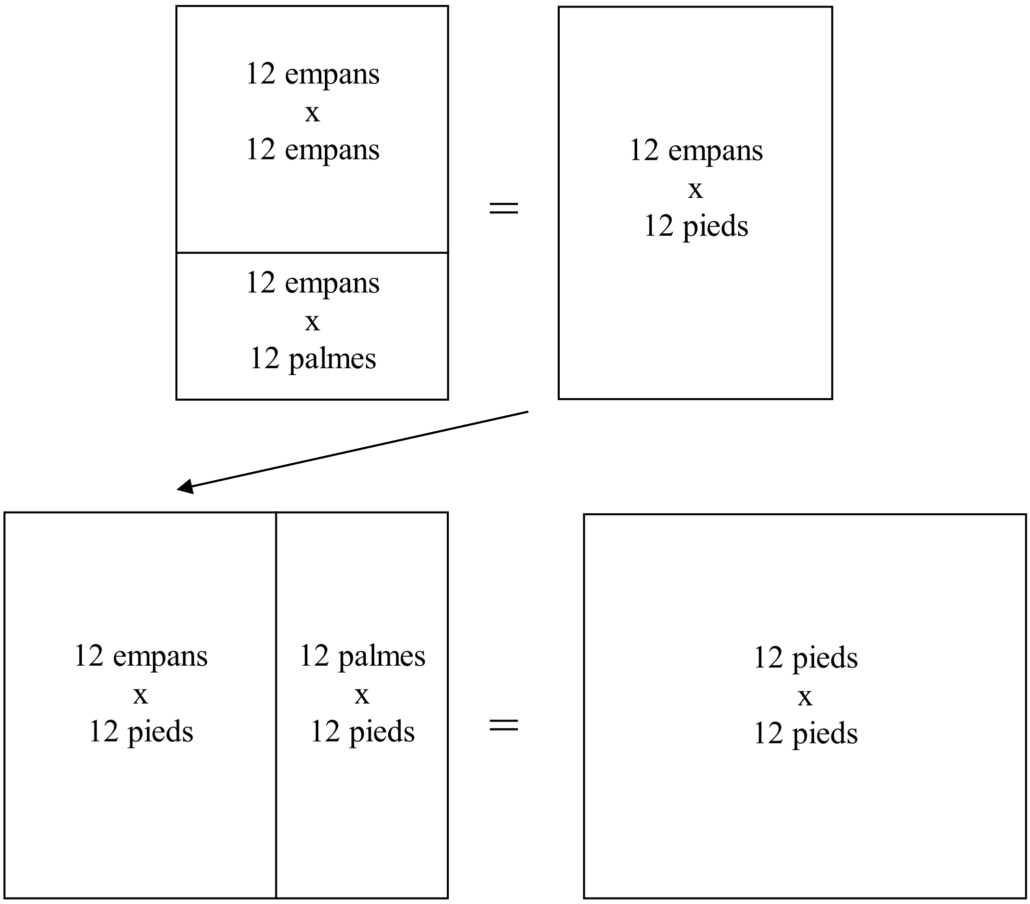
4. le système dimensionnel de la quine, un formidable outil

Le choix du système de la quine permet de faire de multiples opérations géométriques sans aucun calcul de surfaces. Il suffisait pour cela que les bâtisseurs connaissent les deux propriétés de la quine énoncées ci-dessus. On peut également supposer qu'ils aient recueilli de leurs maîtres, au moment de leur apprentissage, le secret de la quine et des multiples règles de conversion qu'elle permet.
Voici, ci-dessous, quelques exemples d'exploitation des propriétés de la quine dans le domaine de la construction.

A la carrière

Au même titre que le système décimal arabe, la quine permet de convertir des surfaces : tout carré vaut un rectangle fait de la dimension précédente et de la dimension suivante. Par exemple, un bâtisseur demande à une carrière de lui fournir assez de pierres pour un mur de 20 empans x 20 empans. Or la carrière ne dispose pas de pierres à ce format. Par un simple coup d'œil à la suite des termes de la quine, le responsable de la carrière sait que 20 empans x 20 empans = 20 palmes x 20 pieds.
Comme la quine est une suite géométrique, chaque unité de la quine, multipliée par elle-même, est aussi égale au produit de l'unité de rang 2 inférieure avec l'unité de rang 2 supérieure. Le responsable de la carrière sait donc aussi que 20 empans x 20 empans = 20 paumes x 20 coudées.
Un grand avantage de la quine par rapport au système décimal moderne consiste en ce que les dimensions successives de la quine sont beaucoup plus rapprochées. On verrait mal, en effet, l'intérêt pour une carrière de savoir que 1 décimètre x 1 décimètre = 1 centimètre x 1 mètre = 1 millimètre x 1 décamètre, sans avoir de dimensions intermédiaires disponibles. Dit en termes mathématiques, la raison de la suite géométrique de la quine est nettement inférieure à 10.

Imaginons, par ailleurs, que le responsable d'une carrière doive livrer assez de pierres pour couvrir une surface carrée de 12 pieds x 12 pieds, et dispose déjà de quoi couvrir une surface carrée de 12 empans x 12 empans.
Or, il sait que chaque unité de la quine est égale à la somme des deux unités précédentes. Il sait donc que 12 pieds = 12 empans + 12 palmes. S'il complète cette surface de 12 empans x 12 empans avec une surface de 12 empans x 12 palmes, il obtiendra une surface totale de 12 empans x 12 pieds.
Ensuite, s'il y ajoute encore une surface de 12 palmes x 12 pieds, il obtiendra la surface de 12 pieds x 12 pieds demandée, cela sans aucun calcul de surfaces :



Le responsable de la carrière peut donc constituer la surface de pierre demandée en associant des pierres déjà disponibles. Il suffit pour cela qu'elles aient été taillées dans les diverses dimensions indiquées par la quine.
Il n'a pas besoin d'étaler la surface totale demandée avant de livrer le tout : les règles de conversion lui permettent de définir le nombre de pierres de dimensions données qu'il doit livrer, pour que l'ensemble corresponde à la surface demandée.

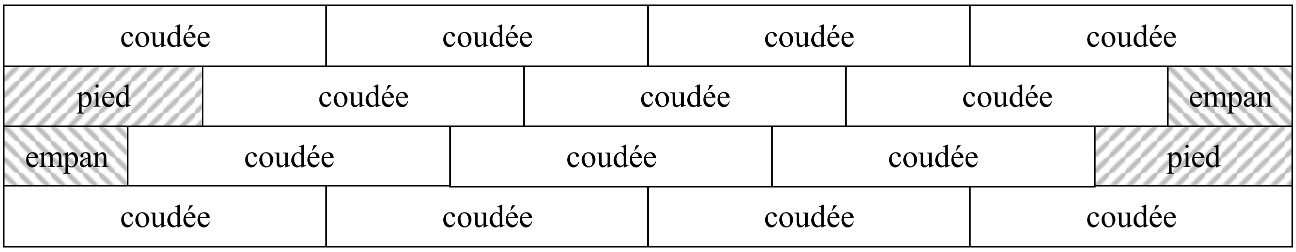
Sur le chantier de construction

Un bâtisseur devra ménager de nombreuses ouvertures dans les murs (portes, fenêtres). C'est autant de surface de pierres économisée. Imaginons qu'il ait prévu une ouverture de 5 coudées par 5 pieds.
S'il veut commander les pierres sans la surface de cette ouverture, la quine lui permet de les soustraire facilement de la surface totale du mur.

S'il a commandé toute la surface du mur (y compris l'ouverture), il peut aisément déterminer (avec les règles de composition de la quine) que l'ouverture vaut exactement 5 pieds x 5 pieds + 5 empans x 5 pieds. Tout autant, elle vaut 5 pieds x 5 pieds + 5 empans x (5 empans + 5 palmes), c'est-à-dire 5 pieds x 5 pieds + 5 empans x 5 empans + 5 empans x 5 palmes. Il s'agit donc de surfaces variées qu'il pourra réallouer séparément à d'autres parties du chantier, toujours sans faire aucun calcul. La quine permet même de convertir des carrés en sommes de rectangles, à l'inverse de l'exemple donné ci-dessus à propos de la carrière. Elle permet aussi de convertir des volumes en d'autres volumes.
L'élévation d'un mur offre un autre exemple. Pour qu'un mur soit solide, on sait qu'il faut que les pierres d'une rangée chevauchent les intervalles de pierres de la rangée inférieure. Imaginons donc que notre bâtisseur veuille assez de pierres d'une coudée de long pour faire un mur de 4 coudées de long sur 4 pierres de haut. A la carrière, on sait qu'1 coudée = 1 pied + 1 empan. On lui livrera alors non pas 16 pierres d'une coudée, mais :

- 14 pierres d'une coudée ;
- 2 pierres d'1 pied ;
- 2 pierres d'1 empan.

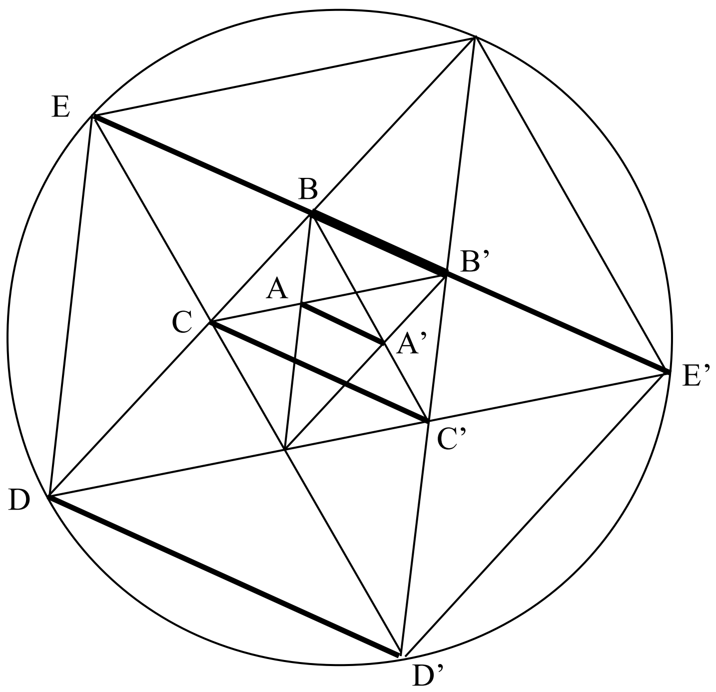
Qui seront directement assemblées comme suit sur le chantier, sans avoir besoin d'y tailler aucune pierre :



On peut enfin imaginer, pour un très grand chantier, que la carrière fournisse, sans indication préalable, un large assortiment de pierres de dimensions variées, respectant les dimensions de la quine. Le bâtisseur saura alors toujours constituer les surfaces (ou les volumes) nécessaires, tout en tenant compte des ouvertures prévues.

La quine, une pratique de standardisation

Le système dimensionnel de la quine peut être considéré comme une prouesse de standardisation et de rationalisation des échanges techniques et commerciaux entre les bâtisseurs et les tailleurs de pierre, ne nécessitant que des règles de composition simples, sans calculs.
Ne figurent ci-dessus que quelques exemples généraux d'exploitation de ce savoir-faire, et j'imagine que des arpenteurs, des architectes et des géomètres sauraient trouver une multitude d'autres exemples autrement brillants de mise en œuvre du système de la quine.
J'ignore si les archéologues ont trouvé des tables de conversion de surfaces exploitant les propriétés de la quine, mais j'imagine que les corporations concernées ont préféré une tradition orale, autrement plus propice à la sauvegarde jalouse d'un savoir-faire qui les rendaient indispensables sur tous les grands chantiers, et qui a imposé au clergé de faire appel à leurs services.
A noter que, quand on dispose de deux dimensions successives de la quine, il est très facile de dessiner un pentagone régulier ou un pentagramme avec une simple ficelle. Ce symbole du pentagramme, typique de la corporation des bâtisseurs, pouvait être un simple indice de référence au standard de la quine, indéchiffrable par des non-initiés. En effet, il contient toute la quine :



si AA' = paume, alors BB' = palme, CC' = empan, DD' = pied et EE' = coudée [2].

Il reste à rechercher comment les bâtisseurs ont élaboré le système de la quine.

5. Comment les bâtisseurs ont-ils élaboré la quine ?

Empirisme ?

L'empirisme est l'hypothèse la plus naturelle pour expliquer la construction de la quine. A force de tenter de se comprendre entre chantiers et carrières, à force de faire face à des unités de mesures qui variaient selon les régions, il est naturel que les bâtisseurs aient tenté de normaliser un système de longueurs. Ils étaient cependant confrontés à l'extrême difficulté de faire des opérations avec les chiffres romains, et à l'illettrisme des travailleurs manuels. D'où la nécessité d'un système dimensionnel permettant de multiples combinaisons de surfaces sans devoir les calculer.

Une fois la quine définie par essais et erreurs, il suffisait de distribuer un étalon – la fameuse canne royale – dans la corporation des bâtisseurs. D'ailleurs, les deux premières dimensions suffisaient, puisque chaque dimension est la somme des deux précédentes.

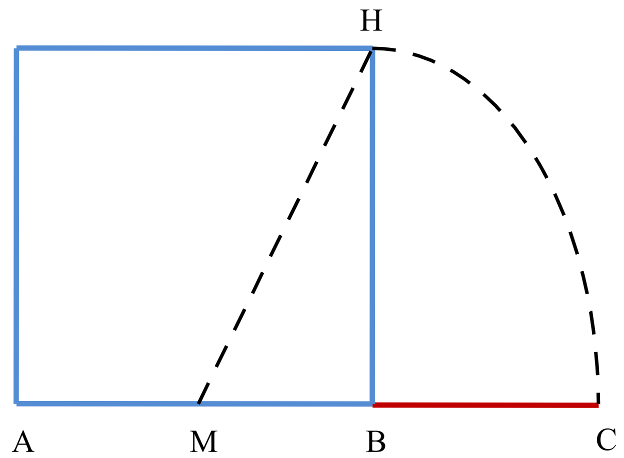
Géométrie ?

Il y avait cependant une autre solution, encore plus générale : A partir <u>d'une seule dimension de référence</u>, quelle que soit sa longueur, on peut construire un système dimensionnel qui respecte les deux propriétés de la quine, et ce toujours <u>sans faire aucun calcul</u> (voir figure ci-dessous) :

- tracer un carré dont le côté est la dimension de référence AB
- déterminer M, milieu de AB
- reporter la longueur MH sur la droite portant AB, pour obtenir MC
- alors, BC, AB et AC sont trois dimensions successives de la quine.

[2] D'après http://www.apmep-aix-mrs.org/bulletin/num01/load/numero1.pdf

– on obtient les termes suivant par somme des précédents.



Pour construire une telle figure, il suffit d'avoir :

– un étalon de longueur. Un seul suffit ;
– un bout de ficelle, en guise de compas ;
– un angle droit pour tracer le carré ; le bout de ficelle peut suffire, mais c'est compliqué. Une solution beaucoup plus simple, rapide et réutilisable, consiste à se fabriquer une corde à 12 nœuds équidistants, qui définissent 12 intervalles identiques. Une telle corde offre un moyen aussi génial qu'empirique pour matérialiser un angle droit : il suffit de tendre la corde selon un triangle dont les côtés font 3 intervalles, 4 intervalles et 5 intervalles, et l'on obtient un triangle rectangle, ce que confirme le théorème de Pythagore. Quand on construit les quatre murs d'une cathédrale, ça peut servir : cette corde, étant aussi longue que l'on veut, offre un angle droit aussi précis que l'on veut. Chère aux Francs-maçons contemporains, cette corde a été l'objet de multiples élucubrations ésotériques, mais ceci est une autre histoire.

Cette méthode géométrique de construction de la quine est déjà un peu plus compliquée que la construction empirique d'un étalon de plusieurs unités (tel que la canne royale) distribué ensuite au sein d'une corporation.

Suite de Fibonacci ?

On peut aussi imaginer que les bâtisseurs du moyen-âge ont fait un peu d'arithmétique : en partant d'une toute petite unité de mesure appelée (à l'époque) la ligne, considérée comme valant 1, les bâtisseurs auraient tout simplement exploité la suite de nombres :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, **34, 55, 89, 144, 233**, 377, 610, 987 …

Dont ceux en caractères gras correspondent à paume, palme, empan, pied, coudée [3].

Cette suite a en effet les deux propriétés nécessaires à la construction de la quine :

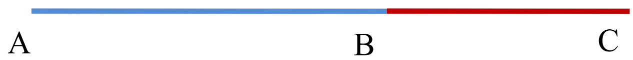
– Chaque terme de la suite est bien la somme des deux termes précédents (c'est le cas pour toute suite dite « de Fibonacci »). Ceci la rend d'ailleurs très facile à retrouver : il suffit de démarrer par 1, 1.
– Chaque terme de la suite, multiplié par lui-même, doit être égal au produit du terme précédent avec le terme suivant. On peut constater que cette exigence n'est pas parfaitement remplie : par exemple, 55 x 55 = 3025, alors que 34 x 89 = 3026. Il est cependant inutile de préciser qu'une telle erreur, inférieure à 1 pour 1000, est parfaitement négligeable quand il s'agit de construire des édifices en pierres.

[3] Consulter par exemple http://aviatechno.free.fr/unites/pieds.php

Muni de la simple méthode de construction numérique de la suite de Fibonacci, n'importe quel arithméticien peut reconstituer la quine. Mais c'est encore plus abstrait que la méthode géométrique, car il faut savoir faire des additions.
A noter cependant que qualifier cette suite de nombres de « suite de Fibonacci » est tout-à-fait abusif : c'est au début du 13^{e} siècle que Fibonacci a fait des travaux mathématiques sur cette suite de nombres, laquelle avait le droit d'exister bien avant qu'il s'y intéresse.

Nombre d'Or ?

Une multitude d'études et de livres ont été écrits au sujet du nombre d'Or. Certains sont mathématiques, d'autres carrément mystiques. On le présente en général comme une proportion ayant des propriétés particulières, comme suit :



On veut que AB / BC = AC / AB.

- Ceci peut s'écrire : $AB^2 = BC \times AC$
- Par ailleurs, il va de soi que AC = AB + BC

Un peu de mathématiques conduisent au résultat qu'il existe un seul rapport AB / BC répondant à cette exigence. Il est égal à (1 + racine (5)) / 2. C'est le nombre d'Or, qu'on note souvent Φ. Sa valeur numérique est proche de 1, 618. Ainsi donc :

$AB = BC \times \Phi$
$AC = AB \times \Phi$

Cette curieuse proportion était déjà connue d'Euclide (300 ans avant Jésus Christ !), et les religieux de la Renaissance l'ont appelée « la divine proportion », histoire de s'approprier le savoir-faire des Francs-maçons pour impressionner le bas-peuple. L'expression « nombre d'Or » n'apparaît qu'au 19^{e} siècle.
Ce qui a excité la curiosité de tant de monde, c'est que ce nombre :

- a des propriétés très troublantes. En particulier, $\Phi^2 = \Phi + 1$;
- se retrouve dans de nombreuses figures géométriques, comme par exemple le pentagone régulier ou le pentagramme ;
- apparaît dans les proportions de multiples architectures du moyen-âge européen et même, dit-on, de l'antiquité européenne ou moyen-orientale.

Revenons à la quine. J'ai indiqué que la suite de Fibonacci offrait une solution très bonne, <u>mais inexacte</u>, au problème de construction de la quine. Or, ce qui est exigé ci-dessus des longueurs des segments BC, AB et AC correspond exactement aux deux propriétés de la quine énoncées plus haut , que je rappelle ici :

- chaque unité de la quine, multipliée par elle-même, est égale au produit de l'unité inférieure avec l'unité supérieure ($AB^2 = BC \times AC$).
- chaque unité de la quine est égale à la somme des deux unités précédentes (AC = AB + BC).

Il en résulte que, pour que la quine respecte exactement les deux propriétés qui la rendent si utile, chacun de ses termes doit être le produit du précédent par le nombre d'Or. Dit en termes mathématiques, la seule solution est que la quine forme une suite géométrique dont la raison est Φ, le nombre d'Or :

palme = paume x Φ

empan = palme x Φ
pied = empan x Φ
coudée = pied x Φ

Ainsi, les deux exigences compositionnelles qui ont présidé au choix des unités de la quine, et dont on a vu l'intérêt concret pour les chantiers et les carrières, imposent que cette quine contienne structurellement le nombre d'Or, fût-ce de façon pas tout-à fait exacte.

A noter les deux compléments suivants :

- le rapport de deux termes successifs de la suite de Fibonacci n'est pas exactement égal au nombre d'Or, mais si vous la continuez, vous constaterez qu'il s'en rapproche de plus en plus. Et, dès les premiers termes qui correspondent à la quine, l'écart est très faible (moins de 1 pour 1000, comme déjà signalé) ;
- le théorème de Pythagore, encore lui, révèle que la figure géométrique carrée proposée au paragraphe « Géométrie ? » ci-dessus permet justement de construire la proportion du nombre d'Or entre les segments AB, BC et AC, sans se soucier aucunement de sa valeur numérique.

Pour des développements des considérations mathématiques exposées ici, on pourra se reporter au livre de Christian Hakenholz [4].

Ainsi se conclut cette quatrième hypothèse – celle de l'utilisation du nombre d'Or – pour tenter de comprendre comment les bâtisseurs ont construit la quine. Hélas, il s'agit de l'hypothèse la moins plausible : les bâtisseurs n'ont certainement pas construit cette suite en exploitant la valeur numérique du nombre d'Or, car ils n'avaient pas les outils mathématiques pour la calculer. Ni son expression décimale approchée (1,618) ni son expression irrationnelle exacte (1 + racine (5)) / 2) ne pouvaient être écrites en notation romaine, et encore moins être manipulées dans des opérations algébriques comme je l'ai fait ci-dessus.

Un problème d'histoire de l'architecture

Les quatre hypothèses de construction de la quine proposées ci-dessus aboutissent toutes à une suite qui contient le nombre d'Or avec une excellente précision. Il en résulte que la mesure soigneuse des édifices anciens ne permettra jamais de savoir si ses bâtisseurs avaient exploité le nombre d'Or, ou la suite de Fibonacci, ou une construction géométrique, ou le tâtonnement. En effet, aucun de ces édifices n'a pu être construit avec une précision suffisante pour que des mesures permettent de trancher entre ces hypothèse.

Pour autant, repensons à notre bâtisseur qui a prévu une ouverture de 5 coudées par 5 pieds, proportions choisies pour pouvoir exploiter de multiples façons la surface de pierres ainsi récupérées. Son ouverture est « divine » ou « dorée », car 5 coudées / 5 pieds = le nombre d'Or. Dans tous les cas, il sera tout naturel, des siècles plus tard, de trouver la proportion du nombre d'Or un peu partout dans le bâtiment. Mais ceci ne permet aucunement d'affirmer que les bâtisseurs connaissaient le nombre d'Or.

Ainsi, les lettrés du 19^{e} siècle qui ont glosé sur ce sujet ne disposaient d'aucune preuve objective du rôle du nombre d'Or chez les bâtisseurs du moyen-âge ou de l'antiquité. Quelle pouvait donc être la motivation de ces lettrés, qui sont allés jusqu'à tricher sur les dimensions du Parthénon (sur la colline de l'Acropole à Athènes) pour qu'elles « collent » avec le nombre d'Or ? Au vu du présent argumentaire, c'est particulièrement vain : l'Acropole étant fait de colonnes et non pas de murs en pierre, son bâtisseur n'aurait trouvé aucune utilité à un système permettant de convertir des surfaces.

---

[4] Christian Hakenholz, *Nombre d'or et Mathématique*, Chalagam Edition, Marseille, avril 2006, 62 pages, ISBN 2 – 9508001 – 6 – 5.

Il y a là un débat philosophique qui me semble être le débat entre l'idéalisme et le matérialisme : toute la question est de savoir si ce qui a été premier fut l'idée mathématique abstraite (le nombre d'Or), explicitement mise en application dans la quine, ou bien si ce fut la pratique matérielle et économique des bâtisseurs, dont le système de mesure peut être expliqué, après-coup seulement, par le concept du nombre d'Or. Pour ma part, je crois que les bâtisseurs n'avaient que faire du nombre d'Or en tant que concept mathématique [5].

6. Conclusion

Les bâtisseurs de l'époque préromane – et peut-être même bien avant elle – ont su construire, en l'absence d'un système numérique utilisable, un système d'unités dimensionnelles dont les proportions, quand on en fait l'analyse mathématique, contiennent plus ou moins exactement le nombre d'Or. Ce système d'unités dimensionnelles, la quine, autorisait une multitude de conversions et de compositions de surfaces (et de volumes) <u>sans faire aucun calcul</u>, ce qui permettait de standardiser et de rationaliser les échanges techniques et commerciaux entre carrières et chantiers.

Je vois dans cette quine beaucoup de génie issu d'une pratique productive concrète, et peut-être une certaine culture du secret au sein de la corporation des bâtisseurs. Que les ésotéristes qualifient d'ésotérisme cette culture du secret ne regarde qu'eux : la quine contient, idéalement, le nombre d'Or. Mais ce nombre s'y trouve sans qu'on puisse savoir si les bâtisseurs l'y avaient mis. Puissent nos historiens découvrir un jour un indice, ou un texte ancien, qui tranche cette question.

[5] Je dois à William Lehembre, maître-luthier aujourd'hui disparu, de m'avoir transmis l'intuition que l'usage, conscient ou pas, du nombre d'Or par les bâtisseurs du Moyen-âge était probablement dû seulement à son utilité strictement pratique, qui restait à élucider.